

ED Zusammenfassung

Elektrostatik

Kraft zw. Ladungen: $\vec{F}_{12} = \frac{Q_1 \cdot Q_2}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}^3}$

Elektr. Feldstärke: $\vec{E} = \frac{\vec{F}}{Q}$

bei kontinuierl. Ladungsverteilung: $E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V \rho(\vec{r}') \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV'$

bei Oberflächenladung (z.B. Elektrode): $E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_A \sigma(\vec{r}') \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dA'$

Elektr. Fluss: $\Phi = \epsilon_0 \iint_A \vec{E} \cdot d\vec{A} = \iint_A \vec{D} \cdot d\vec{A}$ mit \vec{D} ... dielekt. Verschiebung

(Hilfsfluss $\hat{=}$ Fluss durch geschlossene Oberfläche)

Gauß'sches Gesetz: $\Phi = \iint_A \vec{D} \cdot d\vec{A} = \iiint_V \rho(\vec{r}) \cdot dV = Q$ - eingeschl. Ladung in V

$\hookrightarrow \text{div } \vec{D} = \rho$

Arbeit im elektr. Feld: $W = - \int_{r_{12}}^{\infty} \vec{F}_{el} \cdot d\vec{s} = \frac{Q_1 \cdot Q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{12}}$

Wegunabhängigkeit d. Arbeitsintegrals: $\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$

Elektr. Potential: $\varphi = \varphi_0 - \int_{P_0}^P \vec{E} \cdot d\vec{s} \Rightarrow \vec{E} = -\text{grad } \varphi$

Energie einer kontinuierl. Ladungsverteilung:

$W = \frac{1}{2} \iiint_V \vec{E}(\vec{r}') \cdot \vec{D}(\vec{r}') dV'$ bzw. $W = \frac{1}{2} \iiint_V \rho(\vec{r}') \cdot \varphi(\vec{r}') dV'$

\hookrightarrow reduziert sich auf Ladungsdichte

Poisson'sche / Laplace'sche Gleichung:

$\text{div grad } \varphi = - \frac{\rho}{\epsilon_0} \Leftrightarrow \Delta \varphi = - \frac{\rho}{\epsilon_0}$... Poisson'sche Gl.

im ladungsfreien Raum: $\Delta \varphi = 0$... Laplace'sche Gl.

Stokes'sche Satz:

$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{s} = \iint_A \text{rot } \vec{E} \cdot d\vec{A} \quad (\hat{=} 0 \text{ i.d. Elektrostatik}) \Rightarrow \text{Gradfeld ist immer wirbelfrei}$

\downarrow
 $\text{rot } \vec{E} = 0$

$(\Leftrightarrow \text{rot grad } \vec{F} = 0)$

(Es gilt auch: $\text{div rot } \vec{F} = 0$... Wirbelfeld ist immer quellenfrei)

Läuter im elektr. Feld:

$\vec{E}_i = -\text{grad } \varphi_i = 0$ (Läuter in ladungsfreier) (Läuter in ladungsfreier)

Läuteroberfläche = Äquipotentialfläche: $\vec{E}_{\text{tang}} = 0 \Rightarrow \vec{\sigma} = \epsilon_0 \cdot \vec{E}_n = \rho_n$

Kapazität:

$C = \frac{Q}{U}$

Energie: $W = \frac{1}{2} C \cdot U^2$ (C ist Fkt. d. Geometrie d. Elektroden)

Dipol: $\vec{p} = Q \cdot d\vec{s}$... Dipolmoment

Polarisation: $\vec{P} = \frac{d\vec{p}}{dV}$

$\vec{P} = \epsilon_0 \chi \cdot \vec{E}$

Identer Dipol: $d\vec{s}_+ \rightarrow 0, Q \rightarrow \infty$

$\vec{\sigma}_p = \vec{P} \cdot \vec{n} = \rho_p$

χ ... elektr. Suszeptibilität

Potential: $\varphi(\vec{r}) = \frac{\vec{p} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0)}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}_0|^3}$

$\rho_p = -\text{div } \vec{P}$

Elektr. Flussdichte / dielekt. Verschiebung in Materie:

$\vec{D} = \epsilon_0 \cdot \vec{E} + \vec{P}$
 $= \epsilon_0 (1 + \chi) \cdot \vec{E}$
 ϵ_r ... rel. Dielektrizitätskonstante

$\text{div}(\epsilon_0 \cdot \vec{E}) = \underbrace{\text{div } \vec{D}}_{\rho_{\text{ges}}} = \underbrace{\text{div } \vec{D}}_{\rho_{\text{frei}}} - \underbrace{\text{div } \vec{P}}_{\rho_{\text{gebunden}}}$

$\hookrightarrow \text{rot } \vec{D} = \epsilon_0 \cdot \text{rot } \vec{E} + \text{rot } \vec{P}$
 $\hat{=} 0$ in Elektrostatik

Grenzflächen-Verhalten:

Normalkomponente von \vec{D} geht stetig über / Tangentialkomponente von \vec{E} geht stetig über

$\hookrightarrow \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}$

Potential: $\varphi_1 = \varphi_2$, aber: $\epsilon_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} = \epsilon_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} = \sigma_{\text{frei}}$

Kräfte auf Leiter: $\vec{F} = \iint \frac{\sigma^2(\vec{r})}{2\epsilon_0} d\vec{A}$

mit Prinzip d. virtuellen Verschiebung:

1) geschl. System: $\vec{F} \cdot d\vec{s} = -dW$

2) offenes System: $\vec{F} \cdot d\vec{s} = -(dW + dW_{\text{außen}})$

Kraft an Grenzfläche zweier Dielektrika: $F_y = -\frac{Q^2}{2A} \left(\frac{1}{\epsilon_2} - \frac{1}{\epsilon_1} \right)$

$F_y/A = \frac{\sigma^2}{2} \left(\frac{1}{\epsilon_1} - \frac{1}{\epsilon_2} \right) = \frac{1}{2} \epsilon_1 D_1 - \frac{1}{2} \epsilon_2 D_2 \quad (D_1=D_2=D; \epsilon_1=\frac{D}{E_1}, \epsilon_2=\frac{D}{E_2})$

Elektr. Strom/Stromdichte: $I = \oint \vec{J} \cdot d\vec{s} \quad \vec{J} = \sigma \cdot \vec{E}$... Kontinuitätsstromdichte

$I = \iint \vec{J}(\vec{r}) \cdot d\vec{A}$

$\text{div } \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$... Kontinuitätsgleichung (da $I = \oint \vec{J} \cdot d\vec{A} = -\frac{\partial Q}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} \iiint \rho dV$)

Ohm'sche Gesetze: $\vec{J} = \kappa \cdot \vec{E}$ mit κ ... spezif. Leitfähigkeit

bei homogener Strömung: $I = \vec{J} \cdot A = \kappa \cdot E \cdot A = \kappa \cdot \frac{U}{l} \cdot A = \frac{U}{R}$ mit $R = \frac{l}{\kappa \cdot A}$

Verhalten v. Feldgrößen an Grenzflächen:

(i) $\text{rot } \vec{E} = 0 \Rightarrow E_{\perp 1} = E_{\perp 2} \quad (\Rightarrow D_{\perp 1} = D_{\perp 2})$

(iv) $\text{div } \vec{J} = 0 \Rightarrow \lim_{A \rightarrow 0} \iint \text{div } \vec{J} dV = \lim_{A \rightarrow 0} \oint \vec{J} \cdot d\vec{A} = A_{\text{H}} (J_{20} - J_{10}) = 0 \Rightarrow J_{10} = J_{20}$ (im instationären Fall: $\text{div } \vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$)

(iii) $\frac{\tan \alpha_1}{\tan \alpha_2} = \frac{\kappa_1}{\kappa_2}$

$\hookrightarrow J_{20} - J_{10} = -\frac{\partial \sigma}{\partial t}$

Verlustbehaftete Dielektrika: $\text{div } \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \Rightarrow \frac{\kappa}{\epsilon} \text{div } \vec{D} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \Rightarrow \rho(\vec{r}, t) = \rho(\vec{r}, 0) \cdot e^{-t/\epsilon_r} \quad \text{mit } \epsilon_r = \frac{\epsilon}{\epsilon_0}$... Relaxationszeit

Leistung im elektr. Stromkreis: $P = \iiint \vec{E} \cdot \vec{J} dV = \kappa \iint E^2 dV = \frac{1}{\kappa} \iint J^2 dV$

Magnetostatik

Durchführungsgesetze: $\oint \vec{H} \cdot d\vec{s} = I = \iint \vec{J} \cdot d\vec{A} \Rightarrow \text{rot } \vec{H} = \vec{J}$

[bei zeitabh. Strömung: $\text{rot } \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \Leftrightarrow \oint \vec{H} \cdot d\vec{s} = I_L + I_D$
Verdrängungsstromdichte I_D

Magnet. Flussdichte: $\vec{B} = \mu_0 \cdot \vec{H}$ mit μ_0 ... Permeabilität

Magnet. Fluss: $\Phi = \iint \vec{B} \cdot d\vec{A}$

oder: $\Phi = \oint \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0 \Rightarrow \text{div } \vec{B} = 0$

Magnet. Vektorpotential: $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$ mit \vec{A} ... vektorielles magnet. Potential (nicht eindeutig, da $\text{rot}(\vec{A} + \text{grad } \psi) = \text{rot } \vec{A}$)

\hookrightarrow wähle (frei) $\text{div } \vec{A} = 0$... Coulomb'sche Eichung

$\Delta \vec{A} = -\mu_0 \cdot \vec{J} \quad (\Rightarrow) \quad A_{\square} = \mu_0 \iint \frac{J_{\square}(\vec{r}')}{4\pi |\vec{r} - \vec{r}'|} dV$ mit $\square = x/y/z$

(bei starrer Leiterschleife: $\vec{J} \cdot d\vec{r} = \vec{J} \cdot d\vec{A} \cdot d\vec{s} = I \cdot d\vec{s} \Rightarrow \vec{A}(\vec{r}) = \mu_0 \cdot I \int \frac{d\vec{s}}{4\pi |\vec{r} - \vec{r}'|}$)

Biot-Savart'sches Gesetz: $\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iint \frac{J(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV$

Skalar magnet. Potential: im stromfreien Gebiet: $\vec{J} = 0 \Rightarrow \text{rot } \vec{H} = 0 \Rightarrow \vec{H} = -\text{grad } \psi$

$\Delta \psi = 0 \Rightarrow \psi = \psi(\vec{r}_0) - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{H} \cdot d\vec{s}$ (Vort.: $\oint \vec{H} \cdot d\vec{s} = 0$!!!)

Magnetische Felder in Materie: Diamagnet. Stoffe $\vec{H} = \mu_0 \chi_m \vec{H}$
Paramagnet. Stoffe
Ferromagnet. Stoffe $\vec{M} = \vec{M}(\vec{H})$... Magnetisierungskurve
 \hookrightarrow Magnetisierungsvektor

Magnetische Dipol: elementare, infinitesimale Stromschleife: \vec{D}_m ; idealer Dipol: $I \rightarrow \infty, r_0 \rightarrow 0$
 $\vec{m} = \mu_0 I \cdot \vec{A}$... magnetisches Dipolmoment mit $\vec{A} = r_0^2 \cdot \vec{n}$... gerundete Fläche

Magnetisierung d. Materie: $\vec{M} = \frac{d\vec{m}}{dV}$... Magnetisierungsvektor $\hat{=}$ Dipol-Dichte

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \frac{\vec{M}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV'$$

$$\begin{aligned} \vec{j}_{mag} &= \frac{1}{\mu_0} \text{rot } \vec{M} \quad \dots \text{räumliche } \left\{ \begin{array}{l} \text{Magnetisierungsstromdichte} \\ \text{(elekt. Strömungsdichte!)} \end{array} \right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{Analogie zur Elektrostatik:} \\ \text{Fiktion. magnet.} \\ \text{Flächendichte} \end{array} \right] \\ \vec{K}_{mag} &= \frac{1}{\mu_0} \vec{M} \times \vec{n} \quad \dots \text{Flächendichte} \end{aligned}$$

$\vec{S}_m = -\text{div } \vec{M}$
 $\vec{S}_m = \vec{M} \cdot \vec{n}$

Magnet. Flussdichte in Materie: \vec{j}_{frei} ... bei bewegl. Ladungen; \vec{j}_{mag} ... in Materie gebundene bewegte Ladung

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{j}_{frei} \quad \text{bleibt unverändert} \Rightarrow \text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j}_{frei} + \underbrace{\text{rot } \vec{M}}_{\mu_0 \vec{j}_{mag}} \Rightarrow \vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \vec{M}$$

$$\hookrightarrow \vec{B} = \mu_0 (1 + \chi_m) \cdot \vec{H} = \mu_0 \mu_r \vec{H}$$

Verhalten an Grenzflächen: $\text{rot } \vec{H} \xrightarrow{\text{in}} \text{rot } \vec{H} = \vec{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) \Rightarrow \text{rot } \vec{H} = 0 \Rightarrow \vec{H}_{1t} = \vec{H}_{2t}$ oder $\text{rot } \vec{H} = \vec{K}_{fikt}$ (\Rightarrow Sprung im Tangentialkomponenten von \vec{H})

$$\text{div } \vec{B} \xrightarrow{\text{in}} \text{div } \vec{B} = \vec{n} \cdot (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) \Rightarrow \text{div } \vec{B} = 0 \Rightarrow \vec{B}_{1n} = \vec{B}_{2n}$$

$$\hookrightarrow \frac{\tan \alpha_1}{\tan \alpha_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2}$$

Magnet. Vektorspitzenregel: $\text{rot } \vec{A} = \vec{B} \rightarrow \text{rot } \vec{B} = 0$ (es gibt kein flächhafte Flusslinien!)

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{B}_{1t} = \vec{B}_{2t} \\ \text{div } \vec{B} = 0 \Rightarrow \text{div } \vec{A} = 0 \Rightarrow \vec{A}_{1n} = \vec{A}_{2n} \end{array} \right. \Rightarrow \vec{A}_1 = \vec{A}_2$$

rotations-frei

Magnet. Skalarpotential: $\Psi_A = \Psi_r$

$$\mu_1 \frac{\partial \Psi_1}{\partial n} = \mu_2 \frac{\partial \Psi_2}{\partial n}, \text{ wenn } \vec{B}_n = 0$$

Magnet. Energie: $W = \frac{1}{2} \iiint_V \vec{H}(\vec{r}) \cdot \vec{B}(\vec{r}) dV$ bzw. $W = \frac{1}{2} \iiint_V \vec{A}(\vec{r}') \cdot \vec{j}(\vec{r}') dV'$ (erhält Berechnung d. magnet. Energie aus d. Integration über Stromführende Bereiche)

Induktivität: $\Phi = L \cdot I$

Fluss durch n Leiterschleifen: $\Phi_i = \oint \vec{A}(\vec{r}_i) \cdot d\vec{s}_i = \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_{j=1}^n I_j \oint_{C_i} \oint_{C_j} \frac{d\vec{s}_i \cdot d\vec{s}_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|} = \sum_{j=1}^n L_{ij} I_j$

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n L_{ij} I_i I_j \quad \text{bzw.} \quad W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n I_i \Phi_i$$

Kopplungsinduktivität

Quasistat. Magnetfelder:

Induktionsebene: $\vec{v}_i = \oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = - \frac{d}{dt} \int \vec{B} \cdot d\vec{a} = - \frac{d\Phi}{dt}$

\rightarrow ruhende Körper: $\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = - \int \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{a} \Rightarrow \text{rot } \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

\rightarrow bewegte Körper: $\vec{E} = \vec{v} \times \vec{B} = \vec{v} \times \vec{E}$ (induz. Feldstärke)

$$\hookrightarrow \vec{v}_i = - \iint \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{a} + \oint \vec{v} \times \vec{B} \cdot d\vec{s} \quad (\Rightarrow \text{totale Änderung d. Flusses: } \frac{d}{dt} \vec{B} = \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{B} = \dots = \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \text{rot}(\vec{v} \times \vec{B}))$$

Mit $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$: $\text{rot } \vec{E} = - \frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \vec{A} + \text{rot}(\vec{v} \times \vec{B})$

$$\hookrightarrow \vec{E} = - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \vec{v} \times \vec{B} \quad \begin{array}{l} \text{Elektr. Feld} \\ \text{rot } \vec{E} = 0 \Rightarrow \vec{E} = -\text{grad } \varphi \end{array}$$

\rightarrow Quasistat.: $\text{rot}(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{v} \times \vec{B}) = 0 \Rightarrow (\chi) = -\text{grad } \varphi$

Für ruhende Beobachter: $\vec{E} = - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \text{grad } \varphi \quad (+ \vec{v} \times \vec{B})$ (bewegte)

Grenzgleichungen: $\text{rot } \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$... Ampère'sches Gesetz

\hookrightarrow vernachlässigbar klein bei quasistat. $\text{div } \vec{B} = 0$

$\text{rot } \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$... Faraday'sches Gesetz $\text{div } \vec{D} = \rho$

Materialbeziehungen:
(lineare Medien)
 $\vec{B} = \mu \vec{H}$
 $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$
 $\vec{j} = \kappa \vec{E}$

Vernachlässigung von $\vec{j}_v = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ (\Rightarrow keine Wellenausbreitung)

Diffusionsgleichungen: $\Delta \vec{B} - \mu \kappa \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$... Diffusionsgleichung

$\Delta \vec{A} - \mu \kappa \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = 0$ mit \vec{j} ... Wirbelstromdichte in leitfähigen Medien

(bestimmt Diffusion d. magnet. / elektr. Felder in leitfähigen Medien)
- irreversibel

Für Leiterseite: $\Delta \vec{A} - \mu \kappa \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \text{grad}(\text{div } \vec{A} + \mu \kappa \varphi)$ (M) Coulomb-Gleich: $\text{div } \vec{A} = 0$

Für Quasistat. Leiter:
stet. Felder
 $\vec{j} = \kappa \vec{E}$
 $\vec{A} = -\text{grad } \varphi$
 $\hookrightarrow \Delta \vec{A} - \mu \kappa \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = 0$

\hookrightarrow grad φ bleibt auf anderer Seite

Mit $\text{div } \vec{E} = - \text{div} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \text{div grad } \varphi = 0$
 $\hookrightarrow \varphi = 0$... keine Raumladung

$\hookrightarrow \text{div } \vec{A} = 0 : \Delta \varphi = 0$
 $\text{div } \vec{A} = -\mu \kappa \varphi : \Delta \varphi - \mu \kappa \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$

Abschätzung d. Diffusionsvorganges: $\Delta \vec{B} - \mu \kappa \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \Rightarrow L_D \approx \mu \kappa l^2$
 $\approx \frac{B}{\partial^2} \approx \frac{B}{\partial^2} \dots \text{Diff-Zeit}$ bzw. $L = \sqrt{\frac{60}{\mu \kappa}}$
 (bei period. Vorgängen: $L = \frac{1}{\sqrt{\mu \kappa \omega}}$)



• Feld diffusion in unendlich

ausgedehnte, leitend Halbraum: (i) Transientes Vorgang: Einfeld in die Halbraum: Lösen d. allg. Dgl.

(ii) Einstrahlungszustand: bei zeitlichem Wechselfeld \vec{B} gilt:

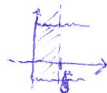
$$R.B.: B_z(0, t) = B_0 \cdot \cos(\omega t + \phi) = \text{Re} \{ B_0 e^{i\phi} e^{i\omega t} \}$$

B_0 ... komplexe Flussdichte (hier: nur z-Komponente)

↳ zeitlichem. Diff.-Gf.:

$$\Delta \vec{B} - j\omega \mu \kappa \vec{B} = 0$$

• Skin-Effekt:



Grundstein wird als Gleichstrom im Intervall $[0, s]$ betrachtet

↳ trägt gleiche Verluste (Wirbelstromverluste)

(Stromverdrängung wird erst interessant, wenn Leiterschicht $\gg s$ ist)

Elektromagnetische Wellen

Maxwell-Gl.: $\text{rot } \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ $\text{div } \vec{B} = 0$
 $\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ $\text{div } \vec{D} = \rho$

Wellengleichungen: $\text{rot rot } \vec{E} = -\mu \frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \vec{H} = -\mu \frac{\partial}{\partial t} (\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}) = -\mu \kappa \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$

$$= \text{gradient } \vec{E} - \Delta \vec{E} = -\Delta \vec{E}$$

$$\Delta \vec{E} - \mu \kappa \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \dots \text{allg. Wellengleichung}$$

analog: $\Delta \vec{H} - \mu \kappa \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0$

• Ebene Wellen: $\frac{\partial}{\partial x} \& \frac{\partial}{\partial y} = 0 \Rightarrow$ für $z = \text{const.}$ ist d. elektromagnet. Feld konstant

$$\Delta \vec{E} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \quad \text{bzw.} \quad \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} - \mu \kappa \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0$$

Lsg.: $\vec{E}_{\Pi} = \underbrace{E_{\Pi 1}}_{\text{vermis. (posit. z-Richtung)}} (t - \frac{z}{c}) + \underbrace{E_{\Pi 2}}_{\text{rückwärts}} (t + \frac{z}{c})$ mit $\Pi = x, y, z$

$$\text{rot } \vec{H}_1 = \epsilon \cdot \frac{\partial \vec{E}_1}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (\vec{e}_z \times \vec{H}_1) = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{e}_z \times \vec{H}_1) \Rightarrow -\vec{e}_z \times \vec{H}_1 = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \cdot \vec{E}_1 \quad \text{WV Wellenwiderstand}$$

$$\text{rot } \vec{E}_1 = -\mu \cdot \frac{\partial \vec{H}_1}{\partial t} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{e}_z \times \vec{E}_1) \Rightarrow \vec{e}_z \times \vec{E}_1 = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \cdot \vec{H}_1$$

$$\text{div } \vec{E}_1 = 0 = \frac{\partial E_{1z}}{\partial t} = -\frac{1}{c} \frac{\partial E_{1z}}{\partial t}$$

$$\text{div } \vec{H}_1 = 0$$

$\vec{E}_{1z} = 0$
 $\vec{H}_{1z} = 0$

↳ ohne Wellen, die sich in z-Richtung ausbreiten, besitzt kein Komponenten in die Ausbreitungsrichtung
 ↳ transversale elektromagnet. Wellen (TEM)

[bei richtungsabhängiger Wellen: (T-E)]

• Harmonische, ebene Wellen: $\vec{E} = E_x \cdot \vec{e}_x : E_x(z, t) = E_{x0} \cos[\omega(t - \frac{z}{c}) + \varphi] = \text{Re} \{ E_{x0} e^{i\varphi} e^{i\omega(t - \frac{z}{c})} \}$
 $\vec{H} = H_y \cdot \vec{e}_y : H_y(z, t) = H_{y0} \cos[\omega(t - \frac{z}{c}) + \varphi] = \text{Re} \{ H_{y0} e^{i\varphi} e^{i\omega(t - \frac{z}{c})} \}$

$$\text{mit: Kreisfrequenz: } \omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

$$\text{Wellenlänge: } \lambda = \frac{c}{f}$$

$$\text{Wellenzahl: } k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{c}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} E_x = E_{x0} \cos(\omega t - k z + \varphi) \\ H_y = \frac{E_{x0}}{Z} \cos(\omega t - k z + \varphi) \end{array} \right. \Rightarrow k = \frac{\omega}{c} \dots \text{Dispersionsbeziehung}$$

disperitives Medium


Phasengeschwindigkeit: $\omega t - k z + \varphi = \text{const.} \Rightarrow v_{ph} = \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{\mu \epsilon}} \dots$ Ausbreitungsgeschwindigkeit d. Wellen

Dispersion: $\omega = \omega(k)$ [Phasengeschw. hängt von Frequenz ab]

Gruppengeschwindigkeit: $v_g = \frac{\partial \omega(k)}{\partial k}$ (für Übertragung von Information maßgebend)

• Polarisation: \vec{E} schwingt z.B. parallel zur x-Achse; $\vec{E} = E_x \cdot \vec{e}_x \Rightarrow$ linear polarisierte ^{ebene} Welle

Ein linear polarisierte ebene Welle kann in 2 linear polarisierte Wellen gleicher Phase-Lage (t) zerlegt werden: (x)



$$E_x = E_{x0} \cos(\omega t - kx) \\ E_y = E_{y0} \cos(\omega t - kx)$$

Annahme: Phasenverschiebung φ zw. E_x und $E_y \Rightarrow$ Spitze von \vec{E} liegt auf Ellipse
(Spezialfall: $\varphi = \frac{\pi}{2}(2n+1)$ und $E_{x0} = E_{y0}$: zirkularpolarisierte Wellen)

• Stehende Wellen: 2 ebene Wellen gleicher Amplitude, Wellenlänge und Polarisierung laufen in entgegengesetzten Richtung:

z.B. $E_x(z,t) = E_{x0} \cos(\omega t - kx) + E_{x0} \cos(\omega t + kx) = 2 E_{x0} \cos(kx) \cdot \cos(\omega t)$ (bei stehender Welle sind \vec{E} und \vec{H} um 90° phasenverschoben)

entsg: $H_y(z,t) = \dots = 2 \frac{E_{x0}}{Z} \sin(kx) \sin(\omega t)$

• Reflexion & Brechung: Randbed.: (i) $\vec{E}_{te} = \vec{E}_{tr}$ (ii) $D_{1n} = D_{2n}$
(iii) $\vec{H}_{te} = \vec{H}_{tr}$ (iv) $B_{1n} = B_{2n}$

Reflexion an ideal leitender Wand: 1) \perp : Einfallende Welle: $\vec{E}_e = E_{e0} e^{i(\omega_e t - k_e z)} \cdot \vec{e}_x$
 $\vec{H}_e = \frac{E_{e0}}{Z} e^{i(\omega_e t - k_e z)} \cdot \vec{e}_y$
($k \rightarrow \infty$)

reflektierte Welle: $\vec{E}_r = E_{r0} e^{i(\omega_r t + k_r z)} \cdot \vec{e}_x$
 $\vec{H}_r = -\frac{E_{r0}}{Z} e^{i(\omega_r t + k_r z)} \cdot \vec{e}_y$

Energie-Fluss \vec{S} wird durch Poynting-Vektor \vec{S} beschrieben
 $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} = \frac{E_{e0}^2}{Z} \cos^2(\omega t - k_e z) \cdot \vec{e}_z = \frac{E_{e0}^2}{Z} \cdot \vec{e}_z$
 $\left[\frac{V}{m} \cdot \frac{A}{m^2} = \frac{W}{m^2} \right]$... Leistungs-dichte
(komplex: $\vec{S} = \frac{1}{2} \vec{E} \times \vec{H}^*$)

Randbed.: (i) $\vec{E}_e + \vec{E}_r = 0 \Rightarrow \vec{E}_{e0} = -\vec{E}_{r0}$
 $\hookrightarrow \omega_r = \omega_e = \omega$ und $k_r = k_e = k = \frac{\omega}{c}$

(iii) $\vec{H}_e + \vec{H}_r = 2 \frac{E_{e0}}{Z} \vec{e}_y \neq 0$ } Spang in magnet. Feldstärke wird durch Flächenströme
 $i_2 = 0$ } komponent: $\text{rot } \vec{H} = \vec{j}_F \Rightarrow \vec{j}_F = \vec{n} \times (\vec{H}_e - \vec{H}_r) = \vec{n} \times \vec{H}_e = 2 \frac{E_{e0}}{Z} \vec{e}_x (e^{i\omega t})$

2) Schräger Einfall: $\alpha_e = \alpha_r$

Reflexion an 2 Dielektrika: (i) $\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \sqrt{\frac{\mu_1 \epsilon_1}{\mu_2 \epsilon_2}} = \frac{c_2}{c_1} = \frac{n_2}{n_1}$ (Brechungsgesetz nach Snellius)

(ii) $\left(\frac{E_{r0}}{E_{e0}} \right)_\perp = \frac{Z_2 \cos \alpha_1 - Z_1 \cos \alpha_2}{Z_2 \cos \alpha_1 + Z_1 \cos \alpha_2}$ $\left(\frac{E_{r0}}{E_{e0}} \right)_\parallel = \frac{Z_2 \cos \alpha_2 - Z_1 \cos \alpha_1}{Z_2 \cos \alpha_2 + Z_1 \cos \alpha_1}$

(iii) $\left(\frac{E_{t0}}{E_{e0}} \right)_\perp = \frac{2 Z_2 \cos \alpha_1}{Z_2 \cos \alpha_1 + Z_1 \cos \alpha_2}$ $\left(\frac{E_{t0}}{E_{e0}} \right)_\parallel = \frac{2 Z_2 \cos \alpha_1}{Z_1 \cos \alpha_1 + Z_2 \cos \alpha_2}$

